Prosiding SPMIPA. pp. 163-169. 2006 *ISBN : 979.704.427.0*

PENENTUAN MODEL KURVA PERTUMBUHAN PADA TULANG RAMUS

Sudarno
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. Soedarto, Kampus UNDIP Tembalang, Semarang

Abstrak: Model kurva pertumbuhan merupakan generalisasi dari model regresi multivariate. Dibicarakan penentuan model pertumbuhan tulang ramus pada satu sampel. Masalah yang dibahas meliputi uji normal multivariate, uji kecocokan model, taksiran dan interval kepercayaan parameter serta uji signifikansi linier. Komputasi statistik pada rumus yang diperlukan, menggunakan perangkat lunak statistik SAS. Dengan mengetahui taksiran model yang benar, maka dapat dipergunakan untuk alat prediksi untuk waktu yang lain.

Kata Kunci: Uji normal multivariate, Uji kecocokan model, Model kurva pertumbuhan.

PENDAHULUAN

Sesuatu yang mengalami pertumbuhan, perkembangannya dipengaruhi oleh waktu. Sehingga dapat dibuat hubungan antara pertumbuhannya dengan waktu. Untuk membuat hubungan ini, dapat menggunakan hubungan linier antara keduanya, yaitu memakai *model regresi linier univariat* atau *berganda*. Perluasan dari model regresi ini dan untuk variabel responnya jamak, menggunakan *model regresi multivariate*, yang biasa disebut *model kurva pertumbuhan.* Selain itu model ini kadang disebut pula *model kurva pertumbuhan satu sampel,* yang telah diperkenalkan oleh Rao (1959). Agar memenuhi asumsi seperti yang dipersyaratkan dalam teori, perlu uji normal multivatiat, yaitu untuk mengetahui bahwa sebaran data berdistribusi normal multivariate dengan vector rataan $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks kovarian $\boldsymbol{\Sigma}$, menurut [1] dan [2], dan [5]. Sedangkan menurut [7] atau [4], untuk mendapatkan taksiran model yang dapat dipercaya kebenarannya perlu uji kecocokan model.

Tulisan ini akan mencari model pertumbuhan tulang ramus dengan mengambil empat macam umur sebanyak 20 individu. Uji normal multivariate menggunakan uji statistik skewness dan kurtosis. Sedangkan uji kecocokan model menggunakan, uji rasio likelihood. Selain itu menaksir parameter dan interval kepercayaannya, serta dibahas pula uji pencilan yang menggunakan pertidaksamaan Bonferroni.

Sistem komputasi statistik yang muncul pada rumus yang ada, menggunakan olahan perangkat lunak SAS. Dengan mendapatkan taksiran model kurva pertumbuhan, maka akan dapat dipergunakan sebagai alat prediksi untuk umur yang lain. Sedangkan dengan mengetahui adanya pencilan pada kumpulan individu, secara langsung dapat diketahui pertumbuhan individu yang berbeda dari yang lainnya. Sehingga dapat menjadi bahan kajian untuk masalah yang lain.

UJI NORMAL MULTIVARIAT DAN MODEL KURVA PERTUMBUHAN

Uji Normal Multivariat berdasarkan Statistik Skewness dan Kurtosis

Misal matriks kovarian sampel

$$\mathbf{S} = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x_i}-\bar{\mathbf{x}})\,(\mathbf{x_i}-\bar{\mathbf{x}})' = \mathbf{H}\,\mathbf{D_u}\,\mathbf{H}'$$

yang mana $\mathbf{H} = (\mathbf{h_1},\ldots,\mathbf{h_p})$ merupakan matriks orthogonal dan $\mathbf{D_u} = \mathrm{diag}\,(\mathrm{u}_1,\ldots,u_p)$. Statistik skewness dan kurtosis sampel, masing-masing diberikan dengan

$$b_{1p} = p^{-1}\sum_{i=1}^{p}\left\{u_i^{-\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_i)^3/n\right\}^2$$

dan

$$b_{2p} = (np)^{-1}\sum_{i=1}^{p}u_i^{-2}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_i)^4\,,$$

dimana $\bar{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}$. Di bawah normal multivariate didapat bahwa

$$\mathrm{E}\left(b_{1p}^{\frac{1}{2}}\right) \sim 0,\ \mathrm{E}(b_{1p}) \sim \frac{6}{np}$$

$$\mathrm{E}(b_{2p}) \sim 3,\ \mathrm{Var}(b_{2p}) \sim \frac{24}{np}$$

$$\left(\frac{np}{6}\right) b_{1p} \sim \chi^2{}_p$$

$$\left(\frac{np}{24}\right)^{\frac{1}{2}} (b_{2p} - 3) \to \mathrm{N}(0,1)$$

Untuk statistik skewness dan kurtosis berlaku hipotesa

H_0: Data berdistribusi normal multivariate

H_1: Data tidak berdistribusi normal multivariate

Sehingga, jika

$$\left(\frac{np}{6}\right) b_{1p} \geq \chi^2{}_{p,\alpha} \qquad (1)$$

maka H_1 diterima, artinya data tidak berdistribusi normal multivariate. Hal serupa, untuk statistik kurtosis, jika

$$\left|\left(\frac{np}{24}\right)^{\frac{1}{2}} (b_{2p} - 3)\right| \geq z_{\alpha/2} \qquad (2)$$

dengan $z_{\alpha/2}$ merupakan titik atas $\frac{\alpha}{2} x\, 100\%$ dari distribusi normal baku. Maka H_1 diterima, artinya data tidak berdistribusi normal multivariate.

Model Kurva Pertumbuhan Satu Sampel

Misal $\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_n}$ adalah iid $\mathbf{N_p}$ (**μ**, Σ), **Σ** >0. Statistik cukupnya adalah vector rataan dan matriks kovarian sampel, masing-masing

$$\bar{\mathbf{y}} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{y_i}$$

dan

$$\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{y_i} - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y_i} - \bar{\mathbf{y}})'/(n-1) \qquad (3)$$

Pandang kasus bilamana komponen $\mathbf{y}_i$ mengukur respon subjek ke-i atas p periode waktu sesudah dilakukan perlakuan. Diharapkan respon dari perlakuan bergantung pada waktu, sehingga bentuk umumnya adalah

$$\mu = \mathbf{B}'\Psi = \mathrm{E}(\bar{\mathbf{y}}) = \mathrm{E}(\mathbf{y_j}) \quad j = 1, \ldots, n \qquad (4)$$

dengan **B'** adalah matriks berukuran *p* x *m*,

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{m-1} \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_p & \cdots & t_p^{m-1} \end{pmatrix} \text{ dan } \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \vdots \\ \Psi_{m-1} \end{pmatrix}, \quad m \leq p$$

Selanjutnya memilih derajat polynomial yang sesuai dengan model.

Uji Kecocokan Model

Untuk mengetahui kecocokan model dalam (4), perlu diuji hipotesa

$$\mathrm{H}: \mu = \mathbf{B}'\Psi \quad \text{vs.} \quad \mathrm{A}: \mu \neq \mathbf{B}'\Psi \qquad (5)$$

dengan **B'** merupakan matriks yang diketahui dan berukuran *p* x *m* serta mempunyai rank *m*. Dengan demikian perlu dicari matriks **C** yang berukuran (*p* – *m*) x *p* dan mempunyai rank penuh sedemikian hingga

$$\mathbf{CB}' = \mathbf{0} \tag{6}$$

Menurut Srivastava dan Khatri (1979) atau Rao (1959), uji rasio likelihood untuk H terhadap A didapat keputusan bahwa, tolak H jika

$$\frac{f-p+m+1}{f(p-m)} n\bar{\mathbf{y}}'\mathbf{C}'(\mathbf{CSC}')^{-1}\mathbf{C}\bar{\mathbf{y}} \geq F_{p-m,\, f-p+m+1,\alpha} \tag{7}$$

dengan

$$f\,\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y_i}-\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y_i}-\bar{\mathbf{y}})', \quad \bar{\mathbf{y}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{y_i}, \quad f = n-1$$

dan $F_{p-m,\, f-p+m+1}$ adalah titik atas 100 α % dari distribusi-*F* yang mempunyai derajat bebas $p-m,\ f-p+m+1$.

Taksiran dan Interval Kepercayaan Parameter

Jika hipotesa H dari persamaan (5) diterima, selanjutnya akan dibahas taksiran dan interval kepercayaan dari parameter Ψ. Taksiran likelihood maksimum dari Ψ diberikan dengan

$$\hat{\Psi} = (\mathbf{BS^{-1}B}')^{-1}\mathbf{BS^{-1}}\bar{\mathbf{y}} \tag{8}$$

Interval kepercayaan (1 - α) 100% untuk $\mathbf{a}'\Psi$ adalah

$$\mathbf{a}'\hat{\Psi} \pm n^{-\frac{1}{2}} T_\alpha (1+f^{-1}T_{p-m}^2)^{\frac{1}{2}}[\mathbf{a}'(\mathbf{BS^{-1}B}')^{-1}\mathbf{a}]^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

dengan

$$T_\alpha^2 = \frac{f\ m}{f-p+1}F_{m,\, f-p+1,\alpha} \tag{10}$$

dan

$$T_{p-m}^2 = n\bar{\mathbf{y}}\mathbf{C}'(\mathbf{CSC})^{-1}\mathbf{C}\bar{\mathbf{y}}, \quad f = n-1 \tag{11}$$

Uji Hipotesa Linier secara Umum

Setelah mengetahui bahwa model (4) layak mewakili data, selanjutnya memutuskan derajat polynomial persamaannya, yaitu, sebagai pengganti dari derajat polynomial *m*, dapat hanya mengambil derajat polynomial *k*, dengan $k \leq m$, agar didapat persamaan yang sederhana tetapi representatif. Matriks **B'** dapat berupa sembarang matriks berukuran *p* x *m*, untuk $m \leq p$. Dengan menulis $\mathbf{B}' = (\mathbf{B}_1', \mathbf{B}_2')$ dan $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$, dimana $\mathbf{B}_1'$ adalah matriks berukuran *p* x *r*, dan $\mathbf{B}_2'$ berupa matriks berukuran $p \text{ x } (m-r)$, ψ_1 adalah vector-*r*, dan ψ_2 adalah vector- $(m-r)$. Sehingga dapat ditulis bahwa

$$\mathbf{B}'\Psi = (\mathbf{B_1^2}, \mathbf{B_2}')\begin{pmatrix}\Psi_0\\ \Psi_1\end{pmatrix} = \mathbf{B_1}'\Psi_0 + \mathbf{B_2}'\Psi_1$$

Jika tertarik dalam uji hipotesa bahwa $\psi_1 = 0$, maka hipotesanya dapat ditulis dalam bentuk

$(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{m-r})\ \psi = \mathbf{0}$

dengan **0** adalah matriks berukuran $(m-r)$ x *r* dan $\mathbf{I}_{m-r}$ adalah matriks identitas berukuran $m-r$. Secara umum, dapat ditulis untuk sembarang hipotesanya sebagai berikut

$$\mathrm{H}: \mathbf{U}\Psi = \eta_\mathbf{0} \quad \text{vs.} \quad \mathrm{A}: \mathbf{U}\Psi \neq \eta_\mathbf{0} \tag{12}$$

dengan η_0 ditentukan dan **U**: *k* x *m*, $k \leq m$. Hipotesa H ditolak jika

$$\frac{f-k-p+m+1}{f\ k}\,\frac{n(\mathbf{d}-\eta_0)'(\mathbf{UEU}')^{-1}(\mathbf{d}-\eta_\mathbf{0})}{1+f^{-1}T_{p-m}^2} > F_{k,\, f-k-p+m+1,\alpha} \tag{13}$$

dengan

$$\mathbf{d} = \mathbf{U}\hat{\Psi}, \quad T_{p-m}^2 = n\bar{\mathbf{y}}\mathbf{C}'(\mathbf{CSC})^{-1}\mathbf{C}\bar{\mathbf{y}}, \quad f = n-1 \tag{14}$$

dan

$$\mathbf{E} = (\mathbf{BS^{-1}B}')^{-1} \tag{15}$$

Batas kepercayaan 100 (1 - α) % untuk parameter berbentuk $\mathbf{u}'\Psi$ dengan **u** adalah anggota subruang yang dibangun oleh vector **U** (**u'** = **a**' **U** untuk suatu vector-*k* **a**), yaitu

$$\mathbf{u}'\hat{\Psi} \pm n^{-\frac{1}{2}} T_\alpha (1 + f^{-1} T_{p-m}^2)^{\frac{1}{2}} \ (\mathbf{u}'\mathbf{E}\mathbf{u})^{\frac{1}{2}} \qquad (16)$$

dengan

$$T_\alpha^2 = \frac{f\ k}{f - p + m - k + 1} F_{k,\, f-p+m-k+1,\alpha} \qquad (17)$$

Uji untuk Pencilan pada Model Kurva Pertumbuhan

Model kurva pertumbuhan diberikan dengan

$$\mathrm{E}(\mathbf{Y_{nxp}}) = \mathbf{A_{nxq}} \Psi_{qxm} \mathbf{B_{mxp}}$$

dengan kolom ke-i dari **Y'** merupakan vector pengamatan ke-i. Dengan menulis

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}) \text{ dan } \mathbf{Y}' = (\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_n}) \qquad (18)$$

didapat rataan vector pengamatan ke-i yang ditulis dengan

$$\mathrm{E}(\mathbf{y_i}) = \mathbf{B}'\Psi \mathbf{a_i},\ i = 1, \ldots, n \qquad (19)$$

Jika rataan pengamatan ke-i mengalami penambahan untuk suatu vector tidak diketahui δ, maka
Dapat ditulis

$$\mathrm{E}(\mathbf{y_i}) = \mathbf{B}'(\Psi \mathbf{a_i} + \delta) \qquad (20)$$

Jika vector pengamatan yang lain tidak mengalami penambahan dalam rataannya (kecuali vector pengamatan ke-i), maka model atau hipotesa H_i diberikan dengan

$$\mathrm{H_i}: \begin{cases} \mathrm{E}(\mathbf{y_j}) = \mathbf{B}'\Psi \mathbf{a_j},\ j \neq i,\ j = 1, \ldots, n \\ \quad \mathrm{E}(\mathbf{y_i}) = \mathbf{B}'(\Psi \mathbf{a_i} + \delta) \end{cases} \qquad (21)$$

Di bawah hipotesa null H: δ = 0, akan berakibat tidak terdapat pencilan dalam data. Untuk menguji hipotesa H terhadap sebarang H_i, langkah-langkahnya sebagai berikut. Definisikan

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}' = (h_{ij})$$

$$h_{ii} = \mathbf{a_i}'(\mathbf{AA})^{-1}\mathbf{a_i}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{Y}'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{Y}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \mathbf{y_i} - \mathbf{Y}'\mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^{-1}\mathbf{a_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}$$

$$\mathrm{F_i} = \frac{f - m + 1}{m} \frac{\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{W}^{-1}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i}}{(1 - h_{ii}) - \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i}'\mathbf{W}^{-1}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i}}$$

$$f = n - q + m - p - 1$$

Selanjutnya, menentukan nilai

$$\hat{\mathrm{Q}} = \underset{1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}}{\mathrm{maks}}\ \mathrm{F_i} \qquad (22)$$

yang mana di bawah hipotesa null F_i mempunyai distribusi-F dengan derajat bebas *m* dan *f* – *m* + 1. Berdasarkan pertidaksamaan Bonferroni, yaitu tolak hipotesa H jika

$$\tilde{\mathrm{Q}} \geq \mathrm{F}_{\mathrm{m, f-m+1}, \frac{\alpha}{\mathrm{n}}} \qquad (23)$$

yang mana $\mathrm{F}_{\mathrm{m, f-m+1}, \frac{\alpha}{\mathrm{n}}}$, merupakan titik atas $100(\frac{\alpha}{\mathrm{n}})\%$ dari distribusi-F, dengan derajat bebas *m* dan $f - m + 1$.

PEMBAHASAN

Diketahui data tentang pertumbuhan tulang ramus pada 20 anak laki-laki dengan umur masing-masing 8; 8,5; 9; dan 9,5 tahun. Datanya disajikan dalam Tabel 1. berikut ini.

Tabel 1**.** Data Pertumbuhan Tulang Ramus.

Individu	Umur (tahun)			
	8	8,5	9	9,5
1	47,8	48,8	49,0	49,7
2	46,4	47,3	47,7	48,4
3	46,3	46,8	47,8	48,5
4	45,1	45,3	46,1	47,2
5	47,6	48,5	48,9	49,3
6	52,5	53,2	53,3	53,7
7	51,2	53,0	54,3	54,5
Individu	**Umur (tahun)**			
	8	8,5	9	9,5
8	49,8	50,0	50,3	52,7
9	48,1	50,8	52,3	54,4
10	45,0	47,0	47,3	48,3
11	51,2	51,4	51,6	51,9
12	48,5	49,2	53,0	55,5
13	52,1	52,8	53,7	55,0
14	48,2	48,9	49,3	49,8
15	49,6	50,4	51,2	51,8
16	50,7	51,7	52,7	53,3
17	47,2	47,7	48,4	49,5
18	53,3	54,6	55,1	55,3
19	46,2	47,5	48,1	48,4
20	46,3	47,6	51,3	51,8

Langkah awal dalam pembahasan ini adalah menguji distribusi data, apakah berdistribusi normal multivariate seperti yang dipersyaratkan dalam asumsi. Uji distribusi normal multivariatnya menggunakan statistik skewness dan kurtosis. Berdasarkan komputasi menggunakan program perangkat lunak SAS dari data di atas didapat hasil bahwa:

Vector rataan $\bar{\mathbf{y}}' = (48{,}66;\ 49{,}63;\ 50{,}57;\ 51{,}45)$ dan matriks kovarians sampel

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 6{,}33 & 6{,}19 & 5{,}78 & 5{,}55 \\ 6{,}19 & 6{,}45 & 6{,}15 & 5{,}92 \\ 5{,}78 & 6{,}15 & 6{,}92 & 6{,}95 \\ 5{,}55 & 5{,}92 & 6{,}95 & 7{,}47 \end{pmatrix}, \text{ dengan } \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0{,}47 & -0{,}59 & -0{,}55 & 0{,}35 \\ 0{,}49 & -0{,}41 & 0{,}48 & -0{,}60 \\ 0{,}52 & -0{,}30 & 0{,}51 & 0{,}62 \\ 0{,}52 & 0{,}63 & -0{,}46 & -0{,}36 \end{pmatrix}, \text{ sedangkan}$$

$\mathbf{D_u} = \mathrm{diag}\ (25{,}09; 1{,}74; 0{,}22; 0{,}11)$. Statistik skewness b_{14} = 0,709, statistik hitung dan statistik tabel dari Persamaan (1) masing-masing adalah 9,454 dan 9,488. Berdasarkan perbandingan nilainya dapat ditarik kesimpulan bahwa H_0 diterima, dengan kata lain bahwa data berdistribusi normal multivariate. Selanjutnya akan diuji berdasarkan statistik kurtosis, yaitu statistik kurtosis

b_{24} = 3,213, statistik hitung dan statistik tabel dari Persamaan (2) masing-masing adalah 0,399 dan 1,960. Berdasarkan perbandingan nilainya dapat ditarik kesimpulan bahwa H_0 diterima, dengan kata lain bahwa data berdistribusi normal multivariate. Sehingga berdasarkan uji statistik skewness dan kurtosis dapat dikatakan bahwa data berdisrtibusi secara normal multivariate.

Misal model linier yang cocok berbentuk $\mathrm{E}(\mathrm{y}) = \Psi_0 + \Psi_1 t$, dengan t + 8,75 menyatakan umur (tahun). Sehingga nilai t masing-masing dapat bernilai –0,75; -0,25; 0,25; dan 0,75, untuk mendapatkan $\mu_1 = \Psi_0 - 0{,}75\Psi_1,\ \mu_2 = \Psi_0 - 0{,}25\Psi_1,\ \mu_3 = \Psi_0 + 0{,}25\Psi_1,$ dan $\mu_4 = \Psi_0 + 0{,}75\Psi_1$. Selanjutnya untuk mengetahui kecocokan model, hipotesanya adalah

$$\mathrm{H}: \mu = \mathbf{B}'\Psi \quad \text{vs} \quad \mathrm{A}: \mu \neq \mathbf{B}'\Psi$$

dengan $\Psi' = (\Psi_0, \Psi_1),\ \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4),$ dan

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0{,}75 & -0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

Untuk mendapatkan matriks **C** sedemikian hingga **CB' = 0** dan **C** mempunyai rank penuh 4 – 2 = 2, dengan menggunakan polynomial orthogonal, diperoleh bahwa

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -0{,}25 & 0{,}75 & -0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

Hipotesa di atas adalah ekuivalen dengan hipotesa berikut yang lebih sederhana, $\mathrm{H} : \mathbf{C}\mu' = \mathbf{0}$.

Berdasarkan Persamaan (7) didapat nilai statistik hitung dan statistik tabel, masing-masing adalah $F_{2,18}$ = 0,1 dan $F_{2;18;0,05}$ = 3,6. Terlihat bahwa nilai statistik hitung lebih kecil dari pada nilai statistik tabel, maka hipotesa H diterima, dengan arti bahwa model linier cocok atau layak dipakai.

Berikutnya menaksir parameter Ψ, dan berdasarkan Persamaan (8), didapat hasil bahwa

$$\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} 50{,}05 \\ 1{,}862 \end{pmatrix}$$

Sehingga taksiran model kurva pertumbuhan tulang ramus diberikan dengan

$$\hat{y} = 50{,}05 + 1{,}862\, t$$

Jika persamaan diubah dalam bentuk umur, didapat

$$\hat{y} = 50{,}05 + 1{,}862\ (t + 8{,}75 - 8{,}75) = 33{,}76 + 1{,}862\ (\text{umur})$$

Sedangkan untuk menentukan batas kepercayaan pada $\mathbf{a}'\Psi$ sesuai dengan Persamaan (9) diberikan dengan

$$\mathbf{a}'\hat{\Psi} \pm n^{-\frac{1}{2}} T_{0,05}\left(1 + f^{-1} T^2_{p-m}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\mathbf{a}'(\mathbf{BS^{-1}B}')^{-\mathbf{1}}\mathbf{a}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Jika dipilih $\mathbf{a}' = (1, t)$, maka batas kepercayaan untuk garis yang diberikan dengan bentuk $\Psi_0 + \Psi_1 t$ dapat dicari. Pada masalah ini didapat n = 20, f = 19, m = 2, p = 4, $T^2_{p-m} = 0{,}20$ dan $T^2_{0,05} = 8{,}63$.

Juga, $(\mathbf{BS^{-1}B}')^{-\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 6{,}189 & 0{,}275 \\ 0{,}275 & 0{,}873 \end{pmatrix}$

Oleh karena itu, batas kepercayaan untuk $\Psi_0 + \Psi_1 t$ diberikan dengan

$$(50{,}05 + 1{,}862t) \pm 0{,}66.(6{,}189 + 0{,}55t + 0{,}873t^2)^{\frac{1}{2}}$$

Jika dipilih $\mathbf{a}' = (1{,}2)$, maka batas kepercayaannya adalah (51,61; 55,94).

Dengan menganggap modelnya adalah linier dalam waktu, akan diuji apakah kecenderungannya adalah linier. Untuk uji ini hipotesanya menurut Persamaan (12) adalah

$$\mathrm{H} : \mathbf{U}\Psi = 0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{A} = \mathbf{U}\Psi \neq 0$$

Dengan mengambil **U** = (0,1), maka hipotesanya menjadi

$$\mathrm{H} : \Psi_1 = 0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{A} = \Psi_1 \neq 0$$

Berdasarkan Persamaan (12), didapat bahwa k = 1, m = 2, p = 4, $T_2^2 = 0{,}20$, f = 19, n = 20, d = 1,86 dan **UEU' = 0,873.** Menurut Persamaan (13) didapat bahwa nilai statistik hitung dan statistik tabel, masing-masing adalah $F_{1,17}$ = 70,29 dan $F_{1;17;0,05}$ = 4,45.

Berdasarkan nilai dari statistik hitung dan statistik tabel, terlihat bahwa hipotesa H ditolak dan kesimpulannya bahwa kecenderungan liniernya adalah signifikan.

Untuk interval kepercayaan 95% pada Ψ_1, berdasarkan persamaan (16) dengan **U** = (0,1)' dan $T^2_{0,05} = \frac{19}{17}.(4{,}45) = 4{,}974$, diperoleh interval (1,39; 2,33).

Akhirnya, akan diuji ada tidaknya pencilan pada data di atas. Dari olahan didapat hasil:

K	Q	FA
9	11.687802	8.7006014

Q > FA: tolak

Sehingga dapat dikatakan bahwa berdasarkan Persamaan (22), nilai statistik hitungnya adalah 11,69 sedangkan menurut Persamaan 23), nilai statistik tabelnya adalah 8,7 dan nilai Q lebih besar dari pada nilai FA. Maka hipotesa H ditolak atau terdapat pencilan dalam kumpulan data yang diperoleh, yaitu pada individu ke-9. Berdasar adanya pencilan ini dapat dipelajari sifat-sifat dari individu tersebut, apakah memang terjadi secara umum ataukah karena khusus.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas bahwa rataan tulang ramus pada umur 8; 8,5; 9; 9,5 masing-masing adalah 48,66; 49,63; 50,57; 51,45. Taksiran model kurva pertumbuhan tulang ramus diberikan dengan $\hat{y} = 50{,}05 + 1{,}862\,(t + 8{,}75 - 8{,}75) = 33{,}76 + 1{,}862\,(\text{umur})$. Dengan diketahuinya taksiran dari modelnya, maka dapat dipergunakan sebagai alat prediksi untuk umur yang lain. Jika dipilih $\mathbf{a}' = (1, t)$, maka batas kepercayaan untuk garis yang diberikan dalam bentuk $\Psi_0 + \Psi_1 t$ adalah $(50{,}05 + 1{,}862\ t) \pm 0{,}66 \text{ x } (6{,}189 + 0{,}55\ t + 0{,}873\ t^2)^{\frac{1}{2}}$. Dalam masalah ini terdapat pencilan dalam kumpulan data yang diperoleh, yaitu pada individu ke-9. Berdasar adanya pencilan ini dapat dipelajari sifat-sifat dari individu tersebut, apakah pencilan terjadi secara umum atau secara khusus.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Mardia, K.V., Measures of Multivariate Skewness and Kurtosis with Application, *Biometrika*, Vol. 57, pp. 529 – 530, 1970.

[2]. Mardia, K.V., Assessment of Multinormality and the Robustness of Hotelling's T^2 Test, *Application Statistics*, Vol. 24, pp. 163 – 171, 1975.

[3]. Potthof, R.F., and Roy, S.N., A Generalized Multivariate Analisys of Variance Model useful especially for Growth Curve Problems, *Biometrika*, Vol. 51, pp. 313 – 326, 1964.

[4]. Rao, C.R., Some Problems involving Linear Hypothesis in Multivariate Analisys, *Biometrika*, Vol. 46, pp. 49 – 58, 1959.

[5]. Srivastava, M.S., A Measures of Skewness and Kurtosis and a Graphical Method for Assessing Multivariate Normality, *Statistics and Probability*, Vol. 2, pp. 263 – 267, 1984a.

[6]. Srivastava, M.S., *Methods of Multivariate Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2002.

[7]. Srivastava, M.S. and Khatri, C.G., *An Introduction to Multivariate Statistics*, North-Holland, New York, 1979.

[8]. Srivastava, M.S. and Von Rosen, D., Outliers in Multivariate Regression Models, *Journal Multivariate Analisys*, Vol. 65, pp. 195 – 208, 1998.